Calculant el centre geogràfic de Catalunya

Gerard Jensen

4 de febrer de 2026

Índex

1 Introducció **1**

1.1 Definició del problema 3

1.1.1 GeoJSON i WGS84 3

1.1.2 Parametrització de la superfície 4

2 Càlcul de les integrals **5**

2.1 Algoritme adaptatiu 6

A Demostracions **8**

Notes

No soc cartògraf ni geògraf ni tinc experiència amb la geodèsia. Actualment soc un estudiant de tercer any d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques a la Universitat Politècnica de Catalunya. Aquest document no pretén ser una font d'autoritat ni material citable. Poden aparèixer errors subtils —i no tan subtils—, pot ser les conclusions siguin incorrectes. La motivació de l'escrit és púrament divulgativa, introduïnt conceptes geodesics des de zero, des del punt de vista d'un estudiant de matemàtiques.

1 Introducció

No se m'acudiria una millor introducció que l'escrita pel matemàtic de la *National Geodetic Survey* dels EUA (Adams, 1959):

> It is a characteristic of human beings that they are curious about things of which they have no definite knowledge. On the whole, this is a laudable trait but often curiosity outruns intelligence. It is true that there are more things in heaven and earth than are dreamed of in our philosophy, but we should allow our intelligence to curb our curiosity

in cases where it is needed and should not insist upon a definite statement where no exactitude exists.

A great many people are curious about what they call the geographical center of a state or a country or even of a whole continent. Now, let us examine into this matter and find out, if possible, what may be the meaning attached to this idea of geographical center of any given area. If we take a bounded plane surface we may, under certain circumstances, get some reasonable meaning into the idea of geographical center or, as it would be in this case, the center of area. If the region under consideration is a connected surface bounded by a regular system of lines such as a regular polygon or a circle, then, what is called the "center" will be the center of area. It will also be the center of gravity when the surface is considered as a thin plate.

[...]

Now, we have been discussing merely a plane area; but any region on the earth is a portion of a spherical surface or, if we wish to be very exact, it is a portion of the surface of an ellipsoid of revolution. But it may be objected that a plane map may be made of the country or state and then the center of area of this plane surface can be determined. This is all well and good but no map of a spherical surface can be made that is not distorted in some way. We can make a map that has constant area ratio, but, if so, distortions in shape must take place, so the representation is not a true representation of the actual surface. We have already seen that, even if it were a true representation, the center of area would have no meaning unless the outline were symmetrical such as a circle, an ellipse, a square, or other figure of similar class. Unfortunately, countries and states as political units or as physical features of the earth are not so constituted.

It may be suggested that we could make such a determination on the surface of a globe and so attain some definiteness. But here we run into new difficulties. If we wish to define the center of area as the center of gravity of the surface, such center would not even lie in the surface but would be some distance beneath the surface of the globe. On the other hand, if we wish to make the determination by the intersection of two lines mutually perpendicular, such that each of them divides the area into two equal parts, what lines should be adopted for the purpose? If we take one of them to be the meridian, should the other be an east and west great cirele or should it be a parallel? Two mutually perpendicular great circles in any other directions would necessarily give a different point due to the lack of symmetry in the region considered. When the matter is looked at in any way, elements of uncertainty arise and we must conclude that there is no definite center of area or geographical center of any political or physical divisions of the earth's surface.

In the United States Coast and Geodetic Survey we receive many requests for information regarding the geographical center of the United States or even sometimes regarding that of the whole of North America. Different results have been given by different investigators and at times we are requested to arbitrate the rival claims. From the preceding discussion it is seen that this discrepancy of results is to be expected. As a matter of fact, the conclusion is forced upon us that there is no such thing as the geographical center of any state, country or continent. The point determined will depend entirely upon the definition given by the one making the computation. No account should be taken of a characteristic of an area that will depend entirely upon the supposition made in its determination. If there were some rational definition so that all computations would necessarily lead to the same result, then some meaning might be attached to such a result. However, in most cases it is nothing but idle curiosity that leads to an interest in such a point, or some man may want it definitely located in his front yard. To all such the warning should be given that the point is much like the proverbial flea; when you think you have it you have it not.

Després de dur-se una gran decepció en saber que allò que busquem no té sentit, un pot recordar que als matemàtics mai[1] els ha preocupat la utilitat dels resultats que busquen. En el nostre cas, independentment de la definició que s'esculli, seguirà sent un problema interessant mereixedor del nostre temps.

1.1 Definició del problema

Com que no en sé res de la geodèsia i no tinc criteri, em limito a seguir la definició de la Viquipèdia, la qual diu el següent: "In geography, the centroid of the two-dimensional shape of a region of the Earth's surface (projected radially to sea level or onto a geoid surface) is known as its geographic centre" (Wikipedia, 2026a). És a dir, el problema es redueix en trobar el centroide d'una superfície —el qual dona un punt en $\mathbb{R}^3$— i aplicar-li una certa projecció.

1.1.1 GeoJSON i WGS84

Conceptualment entenem què volem dir amb Catalunya, però com la descrivim matemàticament? En primer lloc, com definim quina forma té la superfície de la Terra, i en segon, com definim quina part d'aquesta superfície pertany a Catalunya? L'Institut Cartogràfic i Geològic de Catalunya conté a la seva pàgina web (ICGC, 2025) un arxiu que descriu la frontera de Catalunya en format `geojson`. Segons la documentació d'aquet format d'arxius (Butler et al., 2016), per definir una regió de la superfície de la Terra el fitxer el representa com un polígon a la superfície, i emmagatzema les coordenades (longitud i latitud) dels seus vèrtexs. La longitud i latitud estan en un sistema de coordenades anomenat WGS84, el qual descriu la superfície de la Terra.

És coneixement popular que la Terra no es plana. En general també es àmpliament conegut que no només no es plana sino que a més, degut a la rotació de la Terra, més que una esfera, s'aproxima a un elipsoide, un elipse en revolució. El sistema WGS84 (Wikipedia, 2026b) defineix un elipsoide centrat al centre de massa de la Terra amb un cert semieix major a i un cert aplatament f. Amb els angles de longitud i latitud es localitza qualsevol punt en aquesta superfície. Concretament les dades del WGS84 són:

Paràmetre	Símbol	Valor
Semieix major	a	6378137,0 m
Aplatament	f	1/298,257223563
Constant gravitacional	GM	$3,986004418 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$
Velocitat angular	ω	$72,92115 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

Una ambiguitat en la descripció del polígon representat al fitxer `geojson` és quina forma tenen els segments entre dos vèrtexs consecutius. En $\mathbb{R}^2$ els polígons tenen costats rectes, però en estar inscrits a la superfície d'un elipsoide, la línia recta no és una opció. Una possibilitat seria utilitzar la geodèsica entre aquests dos putns, i.e. el segment de longitud més curta. Ara bé, la documentació del fitxer diu que s'utilitza una interpol·lació línial entre les cordenades dels dos punts —el qual no necessàriament equival a la geodèsica—.

[1] Almenys els qui no s'hi dediquen professionalment i no tenen una família a qui alimentar

1.1.2 Parametrització de la superfície

Una manera comú de parametritzar una esfera és usant cordenades esfèriques:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\cos\phi \quad \text{Amb } \theta \in [-\pi,\pi] \text{ i } \phi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ z &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{1}$$

Hom podria pensar que per parametritzar l'elipsoide és suficient aplicar la transformació

$$\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v \\ y &= a\sin u\cos v \\ z &= b\sin v \end{aligned} \tag{2}$$

on b és el semieix menor, que es calcula com $b = a(1-f)$. És correcte que aquesta és una parametrització de l'elipsoide de WGS84. Nogensmenys seria incorrecte assumir que u equival a la longitud i v equival a la latitud geocèntrica.[2] Donat un punt $p \in \mathbb{R}^3$, la seva longitud λ equival a l'angle θ de p en cordenades esfèriques. De la mateixa manera, la latitud geocèntrica ψ equival a l'angle ϕ en aquestes cordenades. Intuitivament el que suceeix és que en escalar l'eix z per b i els eixos x i y per a, l'angle ϕ canvia, en no ser un escalat uniforme. Es pot consultar la demostració a l'apendix.

Una parametrització més intel·ligent seria la següent:

$$\begin{aligned} x &= r(\phi)\cos\theta\cos\phi \\ y &= r(\phi)\sin\theta\cos\phi \\ z &= r(\phi)\sin\phi \end{aligned} \tag{3}$$

On $r(\phi)$ és el radi, que només depèn de ϕ. És directe comprovar que d'aquesta manera $\theta = \lambda$ i $\phi = \psi$. En particular

$$r(\phi) = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}} \tag{4}$$

on e és l'excentricitat de l'elipsoide, i $e = \sqrt{f(2-f)}$.

Ara bé, és necessària una distinció. El que fins ara s'ha denotat amb el símbol ψ és l'anomenada latitud geocèntrica. El que suceeix és que, segons (Huber, 2014), als mapes i recursos geogràfics en general el terme latitud és refereix a un altre tipus de latitud, la latitud geodètica. El meu amic P. Aparício, estudiant de física, m'explica sobre el tema:

" Per tema d'astronomia observacional, perquè les estrelles, planetes, nebuloses, etc estàn catalogades en coordenades que (després d'un parell de transformacions) responen més a això [latitud geodètica] que no pas a la Terra en sí [latitud geocèntrica]. "

Aquestes dues latituds, la geocèntrica ψ i la geodètica φ estan relacionades de la següent manera:

$$\psi = \arctan((1-f)^2\varphi)$$

[2] De fet $u = \lambda$ però $v \neq \psi$

En principi no importa quina de les dues latituds utilitzem per fer els càlculs, sempre que s'usin les fórmules pertinents en cada cas, però resulta que utilitzar latituds geodètiques ens serà més útil. Així doncs, segons (Losch & Seufer, 2003) la parametrització de l'elipsoide amb latitud geodètica és:

$$\sigma(\lambda, \phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} (\cos\varphi \cos\lambda, \cos\varphi \sin\lambda, (1 - e^2) \sin\varphi) \tag{5}$$

Llavors, si P és el polígon descrit pel fitxer `geojson`, la superfície de la qual en volem calcular el centroide és $S = \sigma(P)$. Per calcular-lo utilitzem (Yasskin, 2026):

$$\mathbf{c} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{A_S} \left(\iint_S x \, \mathrm{d}S, \iint_S y \, \mathrm{d}S, \iint_S z \, \mathrm{d}S \right) \tag{6}$$

On $A_S = \iint_S \mathrm{d}S$ és l'àrea de S. En el cas particular de l'àrea A_S, aplicant la parametrització σ s'obté la integral

$$A_S = \iint_{\sigma(P)} \mathrm{d}S = \iint_P \|\sigma_\lambda \times \sigma_\varphi\| \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\varphi = a^2(1 - e^2) \iint_P \frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\varphi \tag{7}$$

on σ_λ i σ_φ són les derivades parcials de σ.

Per curiositat, la integral en cordenades geocèntriques d'A_S és:

$$A_S = a^2(1 - e^2) \iint_{\widetilde{P}} \frac{\cos\psi \sqrt{1 + e^2(e^2 - 2)\cos^2\psi}}{(1 - e^2 \cos^2\psi)^2} \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\psi \tag{8}$$

amb $\widetilde{P}$ representant el mateix polígon que P però en cordenades geocèntriques.

2 Càlcul de les integrals

El problema s'ha reduit a l'avaluació de 4 integrals dobles sobre un polígon $P \subseteq \mathbb{R}^2$. En general un dels mètodes més utiltizats per resoldre aquesta mena d'integrals s'anomena Mètode d'Elements Finits, el qual consisteix en dividir el polígon en una malla de triangles i llavors aplicar una quadratura de Gauss en cada triangle. Això no obstant, no és el mètode que utilitzarem. Primer perquè no conec aquest mètode i segon perquè les nostres funcions a integrar tenen unes propietats especials. Aquesta també es la raó per la qual integrem en cordenades geodètiques i no geocèntriques. Resulta que es coneix l'antiderivada respecte φ de la funció de l'equació 7.[3] Conèixer l'antiderivada ens útil perquè podem podrem transformar la integral doble en una de simple i aplicar quadratures numèriques per integrals en una variable (que sí que en conec).

En particular podem arribar a una solució analítica de l'equació 7 per un cas concret de polígon. Si P és un rectangle tal que $P = [\lambda_0, \lambda_1] \times [\varphi_0, \varphi_1]$ llavors l'equació es converteix en:

$$\begin{aligned} A_S &= a^2(1 - e^2) \iint_P \frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2} \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\varphi = a^2(1 - e^2) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2} \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2} a^2(1 - e^2)(\lambda_1 - \lambda_0) \left[\frac{\sin\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi} + \frac{\operatorname{arctanh}(e \sin\varphi)}{e} \right]_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\varphi_1} = Q(\lambda_0, \lambda_1, \varphi_0, \varphi_1) \end{aligned}$$

[3] La de 8 respecte ψ també es coneix però és extremadament llarga.

Si Catalunya fos un rectangle ja hauriem acabat el còmput d'A_S (encara caldria calcular la resta d'integrals), però com que no ho és hem de ser una mica més creatius. Una possible solució seria dividir el rectangle R més petit que conté P en cel·les rectangulars i anar sumant les integrals de les cel·les que es trobessin completament dins de P. A mesura que les cel·les es féssin més petites la suma, que serà una aproximació, tendiria al valor de la integral. Una manera més eficient és escollir la mida de les cel·les dinàmicament, adaptat-se a la forma de P. En zones on la frontera de P té moltes oscil·lacions es poden generar cel·les petites i en zones extenses dins de P es poden deixar les cel·les. Precisament aquesta idea és el que acaba passant quant s'usa un quadtree. Una estructura de dades amb una mena d'arbre en dues dimensions disenyada per dividir regions en cel·les de mida variable, limitant el nombre d'elements (vèrtexs) que hi poden haver en cada cel·la.[4] A més a més, es pot *eliminar* el problema de l'error d'aproximació, que ve donat per totes aquelles cel·les que contenen alguna part de P però no estan completament dins de P i que per tant no es compten.

2.1 Algoritme adaptatiu

A continuació es descriurà un algoritme dissenyat per evaluar aquestes quatre integrals per tot polígon simple. L'algoritme no funciona en general per tota mena de funcions, però sí per les quatre que necessitem per resoldre el nostre problema, ja que transformarem les integrals dobles en simples. La idea principal és dividir el problema en problemes més petits usant un quadtree de manera que l'evaluació de les integrals en cada regió P_i sigui sobre un conjunt simple. Per exemple pel càlcul de l'àrea de la regió $S_i = \sigma(P_i)$:

$$A_{S_i} = \iint_{P_i} \mathrm{d}P_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\lambda_0(\varphi)}^{\lambda_1(\varphi)} \|\sigma_\lambda \times \sigma_\varphi\| \,\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}\varphi \tag{9}$$

El primer objectiu serà aconseguir que a cada regió P_i o bé sigui completament buida o bé la frontera de P només intersequi amb la frontera de P_i en dos punts. Aquesta restricció no és equivalent a que P_i sigui un conjunt simple com a l'equació 9 però caldrà serà prou proper.

[4] Això no vol dir que l'estructura limiti el nombre de vèrtexs que hi pot haver en total, al contrari, quan una cel·la conté més vèrtexs que el permès, aquesta es divideix en 4 cel·les més petites, disminuint així el nombre de vèrtexs en cada subcel·la.

Referències

Adams, O. S. (1959). Geographic Center of the United States. https://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/GeoCenter_USA1.pdf

Butler, H., Daly, M., Doyle, A., Gillies, S., Hagen, S., & Schaub, T. (2016, agost). *The GeoJSON Format* (RFC Núm. 7946). RFC Editor. RFC Editor.

Huber, W. A. (2014). *Resposta a StackExchange*. Consultat el 11 de juny de 2020, a partir de https://gis.stackexchange.com/a/108220

ICGC. (2025). *Divisions administratives*. Consultat el 7 de febrer de 2025, a partir de https://www.icgc.cat/ca/Geoinformacio-i-mapes/Dades-i-productes/Geoinformacio-cartografica/Divisions-administratives

Losch, M., & Seufer, V. (2003). How to compute geoid undulations (geoid height relative to a given reference ellipsoid) from spherical harmonic coefficients for satellite altimetry applications. *Earth*.

Wikipedia. (2026a). Geographical centre — Wikipedia, The Free Encyclopedia [En línia; accedit el 30 de gener de 2026].

Wikipedia. (2026b). World Geodetic System — Wikipedia, The Free Encyclopedia [En línia; accedit l'1 de febrer de 2026].

Yasskin, P. B. (2026). MYMathApps: Calculus. https://mymathapps.com/mymacalc-sample/MYMACalc3/Part%20III%20-%20Integrals/SurfInt/Centroid.html

A Demostracions

Comentari. *A la parametrització de l'eq. 2, $v \neq \phi$*

Demostració. Sigui

$$p = (x, y, z) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, b \sin v)$$

llavors

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}$$

i per tant

$$\phi = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{b \sin v}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}}\right) \neq v$$

□