Evaluación Interna Matemáticas: Análisis y Enfoques IB

Definiendo y visualizando exponenciación compleja

Nivel Superior

Programa de Diploma

knl093

Páginas

19

2023

Índice

1. Introducción

Desmos es una herramienta digital que permite principalmente graficar funciones reales. Uno de mis hobbies desarrollado durante este verano de 2022 ha sido graficar funciones no triviales con Desmos. Este hobby es tan popular que hasta tiene un subreddit con casi 10.000 miembros. Lo que significa que unas 10.000 personas de todo el mundo se dedican constantemente a experimentar forzando los límites de esta herramienta digital y compartiendo los resultados con la comunidad.

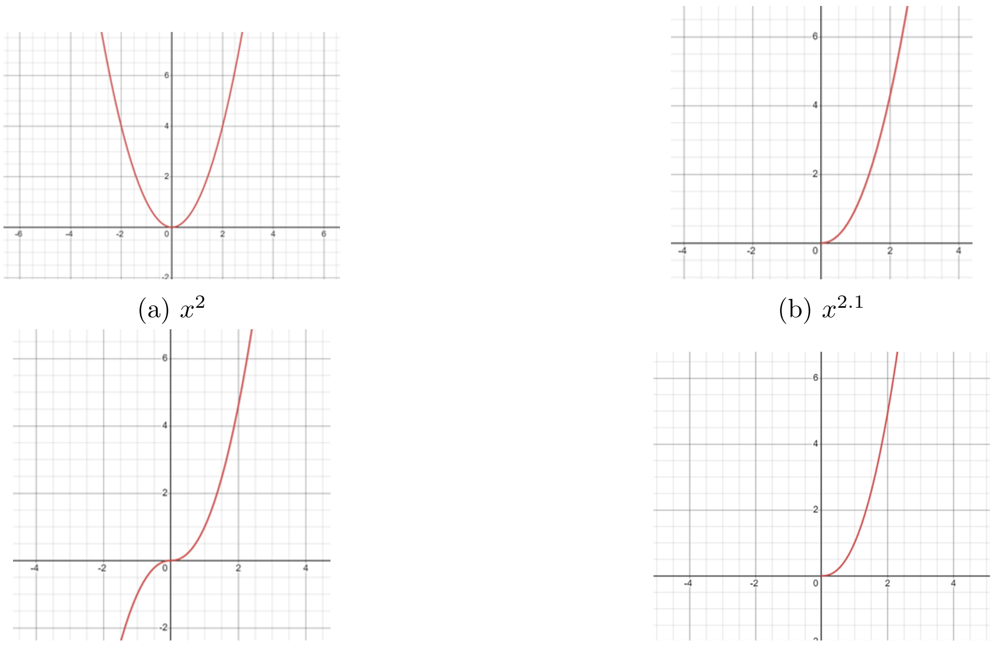
Un día le pedí que me mostrara $f(x) = x^m$, donde m iba de -10 a 10 con pasos de 0.1 ($x \in \mathbb{R},\ m = \frac{k}{10},\ k \in [-100, 100] \cap \mathbb{N}$). Por defecto me graficó $x^{1.0}$. Pero cuando moví el control deslizante que modificaba el valor de m me di cuenta de que cuando m tenía valores no enteros, o bien para $x < 0$ no mostraba nada, o mostraba una parábola en el segundo o tercer cuadrante (Fig. 1).

El objetivo principal de esta interna es poder explicar este comportamiento retratado en la Fig. 1 por Desmos y definir

$$a^b;\ a, b \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

interpolando para valores no enteros partiendo de la definición entera. Tomando como pregunta de investigación:

¿Por qué Desmos no grafica igual x^m?



(a) x^2 (b) $x^{2.1}$ (c) $x^{2.2}$ (d) $x^{2.3}$

Figura 1: Representación de x^m usando Desmos

2. Investigación

2.1. Marco teórico

Se define la exponenciación a^b como la hiperoperación número 3, H_3 (Goodstein 1947), dónde

$$H_0(a,b) = b+1\,;\quad a,b \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

$$H_1(a,b) = a+b = a + (\underbrace{1+1+1+1+\dots}_{b \text{ veces}})\,;\quad a,b \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

$$H_2(a,b) = a\cdot b = (\underbrace{a+a+a+a+\dots}_{b \text{ veces}})\,;\quad a,b \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

$$H_3(a,b) = a^b = (\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\dots}_{b \text{ veces}})\,;\quad a,b \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

El objetivo específico es encontrar una ecuación que tenga las mismas propiedades que la ecuación 2.4, pero que además tenga dominio real para a y b. Se seguirá un método de interpolación propio, pero tomando los requisitos definidos por la comunidad matemática.

2.2. Definición

En la ecuación 2.4, forzar que a sea real no implica ningún problema, puesto que la multiplicación entre reales ya está definida. Así que nos queda:

$$a^b = (\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\dots}_{b \text{ veces}})\,;\quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

El problema ocurre al intentar multiplicar a un número no entero de veces. No se puede multiplicar un número consigo mismo un número no entero de veces. Es necesario pues, interpolar. Modificar y aplicar la ecuación 2.5 para que se comporte de la misma manera ante exponentes enteros mientras que acepte también números reales. [1] Partiendo de la propiedad

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m};\quad n,m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

se define la función inversa de la exponenciación:

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$$

Por lo tanto, $a^{\frac{1}{2}}$ es ese número que multiplicado por si mismo, da a, o sea:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \tag{2.6}$$

Donde $\sqrt{a}$ es la función inversa respeto el eje OY de a^2. No obstante, $\sqrt{a}$, y en términos generales, $\sqrt[2k]{a}; k \in \mathbb{N}$ no son funciones invertibles. Por ejemplo $a^2 = |a|^2$, por lo tanto $\sqrt{a}$ no es exactamente la función inversa de a^2. Para solventar este problema, se define $\sqrt[2k]{a}$ como la función inversa de a^{2k} por

[1] Actualmente no existen unas propiedades consensuadas que la tetración (H_4, repetida exponenciación: $x^{x^{x^{\cdots}}}$) deba cumplir. Es por esta razón que no existe la tetración no entera. (Womack 2013)

$a > 0$ (Sebestyén y Tarcsay 2017). Esta restricción del dominio de la función se relaciona estrechamente con el comportamiento de Desmos que se especificará más adelante.

Podemos hacer un paso más allá y definir para $b \in \mathbb{Q}$:

$$a^b = a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}; \;\; n, m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q} \tag{2.7}$$

Nótese que n y m se definen como coprimos, por lo tanto, representan la fracción insimplificable de b.

$$\frac{n}{m} = b; \; n \perp m$$

Para simplificar la relación que tienen n y m sobre b, se definen dos funciones coprimas entre sí:

$$x = \frac{\nu(x)}{\mu(x)}; \; \nu(x) \perp \mu(x); \; x \in \mathbb{Q}$$

Como $\nexists \sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}} \iff \mu(b) \equiv 0 \pmod 2 \wedge a^{\nu(b)} < 0$, en otras palabras, que no existen raíces de orden par aplicadas a números negativos, es necesario construir una función por partes que restrinja el dominio, y que trate de manera distinta los números positivos y los negativos, para que sí que admita números negativos. Se puede simplificar la expresión. Puesto que $\mu(b) \perp \nu(b)$, si $\mu(b) \equiv 0 \pmod 2$, y por lo tanto $\mu(b)$ es par, entonces $\nu(b)$ no podría serlo, ya que si fuese el caso, $\mu(b)$ y $\nu(b)$ serían pares y compartirían el divisor 2, hecho que negaría su *coprimidad*. Por lo tanto, si $\mu(b) \equiv 0 \pmod 2$, siempre $\nu(b) \equiv 1 \pmod 2$. Así la expresión simplificada queda: $\nexists \sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}} \iff \mu(b) \equiv 0 \pmod 2 \;\wedge a < 0$, puesto que un número negativo a multiplicado un numero impar de veces $\nu(b)$ sigue siendo negativo.

Entonces, con todo lo definido, la función de exponenciación nos queda:

$$f(a) = a^b = \sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}; \;\; a \in \begin{cases} \mathbb{R}^+ & : \mu(b) \equiv 0 \pmod 2 \\ \mathbb{R} & : \text{de lo contrario} \end{cases}, \; b \in \mathbb{Q} \tag{2.8}$$

Ahora mismo tenemos la función:

$$f(x) = x^r = \sqrt[\mu(r)]{x^{\nu(r)}}$$

Cuyo dominio es variable. Queda retratado en esta tabla:

$$\nu(r) \equiv N \pmod 2 \rightarrow N = 1 \text{ si } \nu(r) \text{ es impar}$$

$$\mu(r) \equiv M \pmod 2 \rightarrow M = 1 \text{ si } \mu(r) \text{ es impar}$$

N	M	Dominio	Recorrido
0	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
1	0	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
1	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

*(**Nota:** no se escribe la opción donde M y N son 0, porque eso implicaría que $\nu(x)$ y $\mu(x)$ no serían coprimos, al compartir 2 como divisor).*

Cuando $M = 1$, independientemente de N el dominio de $\sqrt[\mu(r)]{x^{\nu(r)}}$ es $\mathbb{R}$ porque toda raíz de grado impar tiene dominio $\mathbb{R}$.

Si en cambio $N = 1$ y $M = 0$ solo se podrá evaluar $\sqrt[\mu(r)]{x^{\nu(r)}}$ para $x^{\nu(r)} > 0$, puesto que la raíz será de grado par. Y $x^{\nu(r)} > 0$ solo si $x > 0$ puesto que $(-1)^k = -1$ siempre que k sea impar. Por lo tanto el dominio será $\mathbb{R}^+$

El recorrido será $\mathbb{R}$ solo si $N = 1$ y $M = 1$ porque es necesario que el dominio sea $\mathbb{R}$ y que el signo de esos números negativos no se cancela al multiplicarlo un número par de veces por si mismo. $\nu(r)$ debe ser impar.

Así demostramos el comportamiento observado en el programa Desmos en la figura 1, ya que el dominio y recorrido de las funciones que deja graficar solo pueden ser reales. No acepta complejos. Pero nosotros podemos, fuera del programa y de la pregunta inicial, cuestionarnos qué pasa si aceptamos complejos como recorrido.

Vamos a definir una función con las siguientes propiedades:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

La razón por la cual nos vemos obligados a aceptar números complejos como salida de la función es la necesidad de calcular raíces de orden par de números negativos. Queremos que siempre $a \in \mathbb{R}$ y que no dependa de la paridad de $\nu(r)$ y $\mu(r)$. Y para calcular raíces negativas hacemos lo siguiente:

$$\sqrt[n]{-x} = \left|\sqrt[n]{x}\right| \cdot \sqrt[n]{-1};\ x > 0$$

Se emplea $|\sqrt[n]{x}|$ y no $\sqrt[n]{x}$. Se podría pensar que $(-1)^{\frac{1}{n}}$ es el vector normalizado del resultado, cuya dirección y sentido son los del resultado final. Entonces hay que multiplicarlo por una cierta longitud. Al escoger $|\sqrt[n]{x}|$, $\sqrt[n]{x}$ y $\sqrt[n]{-x}$ tendrán el mismo módulo. Ahora hace falta calcular $\sqrt[n]{-1}$, que se consigue usando la identidad de Euler (Cotes y Halley 1714). Se define una función $\delta(n)$ que satisface la igualdad

$$\delta(n) = (-1)^{\frac{1}{n}} \iff (-x)^{\frac{1}{n}} = \left|x^{\frac{1}{n}}\right| \cdot \delta(n) \tag{2.9}$$

Siendo la identidad de Euler $e^{\pi i} = -1$

$$e^{\frac{1}{n}\pi i} = (-1)^{\frac{1}{n}} = \delta(n)$$

Sabiendo que $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\delta(n) = \cos\left(\frac{1}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\pi\right)$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[n]{-x} = \left|\sqrt[n]{x}\right| \cdot \delta(n) = \left|\sqrt[n]{x}\right| \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\pi\right)\right] \tag{2.10}$$

No obstante, esto nos genera un problema. Por ejemplo, sabemos que:

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Pero:

$$\sqrt[3]{-8} = \left|\sqrt[3]{8}\right| \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right] = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$1 + \sqrt{3}i \neq -2$$

Esta inecualidad ha surgido debido a la mezcla de ramas complejas de las raíces. Este error proviene de formular incompletamente la identidad de Euler, puesto que la completa es:

$$e^{\pi i(2k+1)} = -1, k \in \mathbb{Z} \tag{2.11}$$

De esta manera nuestra función $\delta(n)$ queda como:

$$e^{\pi i(2k+1)} = -1$$

$$e^{\frac{1}{n}\pi i(2k+1)} = (-1)^{\frac{1}{n}} = \delta_k(n)$$

$$\delta_k(n) = \cos\left(\frac{\pi}{n}(2k+1)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}(2k+1)\right)$$

Y por lo tanto:

$$\sqrt[n]{-x} = \left|\sqrt[n]{x}\right| \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{n}(2k+1)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}(2k+1)\right)\right] \tag{2.12}$$

$$2 \cdot \delta_0(3) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$2 \cdot \delta_1(3) = -2$$

$$2 \cdot \delta_2(3) = 1 - \sqrt{3}i$$

De esta manera se puede generalizar $x^{\frac{1}{n}}$ cuando $x < 0$. Cabe resaltar que $\delta_k(x)$ solo se empleará si $x < 0$, puesto que ya se ha definido $x^{\frac{1}{n}}$ por $x \geq 0$. Además $x^{\frac{1}{n}} \neq \left|x^{\frac{1}{n}}\right| \cdot \delta_k(n)$ si $x > 0$.

$$x^{\frac{1}{n}} = \left|x^{\frac{1}{n}}\right| \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{n}(2k+1)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}(2k+1)\right)\right]; x \in \mathbb{R}^-, n, k \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$

Técnicamente en esta última ecuación se debería haber escrito $\left||x|^{\frac{1}{n}}\right|$, puesto que como $x < 0$, se podría decir que x tiene su signo negativo dentro de su valor, pero $\left||x|^{\frac{1}{n}}\right| = \left|x^{\frac{1}{n}}\right|$. La cuestión es que en todo caso se puede calcular $\left|x^{\frac{1}{n}}\right|$ puesto que es igual al valor real de la expresión $\sqrt[n]{x}$. Si siempre se emplease la función 2.13 para todo x se llegaría a una contradicción.

$$\sqrt[n]{x} = ((-1)(-1)x)^{\frac{1}{n}} = (-1)^{\frac{1}{n}} \cdot (-1)^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} = \delta_k^2(n) \cdot \sqrt[n]{x}$$

$$\therefore \delta_k^2(n) = 1$$

$$\delta_k(n) = \pm 1$$

Igualdad claramente errónea. Se debe al haber mezclado otra vez las ramas complejas de las raíces. Concretamente ha ocurrido debido al paso $\therefore \delta_k^2(n) = 1$, lo que significa dividir por $\sqrt[n]{x}$. No porque $\sqrt[n]{x} = 0$ si $x = 0$, sino porque $\sqrt[n]{x}$ en si significan distintos valores. El primero de ellos, el trivial valor real. Pero también existen $n-1$ complejos. Se pueden obtener de una manera similar a la ecuación 2.13. Para evitar esta mezcla aparentemente invisible es necesario escribir $|\sqrt[n]{x}|$ para referirse al valor real de $\sqrt[n]{x}$, puesto que equivale al módulo de todos los números que satisfacen $\sqrt[n]{x}$. Usando módulos no existe tal error:

$$\left|\sqrt[n]{x}\right| = \left|\sqrt[n]{(-1)(-1)x}\right| = \left|\sqrt[n]{-1} \cdot \sqrt[n]{-1} \cdot \sqrt[n]{x}\right|$$

$$\left|\sqrt[n]{x}\right| = \left|\delta_k^2(n) \cdot \sqrt[n]{x}\right|$$

Sabiendo que $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$$\left|\sqrt[n]{x}\right| = \left|\delta_k^2(n)\right| \cdot \left|\sqrt[n]{x}\right|$$

$$\therefore \left|\delta_k^2(n)\right| = 1$$

$$\left|\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}(2k+1)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{x}(2k+1)\right)\right)^2\right|=1$$

$$\left|\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{x}(2k+1)\right)+i\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{x}(2k+1)\right)\right|=1$$

Sabiendo que $|a+bi|=a^2+b^2$

$$\cos^2\left(2\cdot\frac{\pi}{x}(2k+1)\right)+\sin^2\left(2\cdot\frac{\pi}{x}(2k+1)\right)=1$$

Sabiendo que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$

$$1=1$$

Entonces:

$$\Omega=a^b=a^{\frac{\nu(b)}{\mu(b)}}=\left(a^{\frac{1}{\mu(b)}}\right)^{\nu(b)}=\left(\left|a^{\frac{1}{\mu(b)}}\right|\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{\mu(b)}\pi(2k+1)\right)+i\sin\left(\frac{1}{\mu(b)}\pi(2k+1)\right)\right]\right)^{\nu(b)}$$

$$\Omega=\left|a^{\frac{1}{\mu(b)}}\right|^{\nu(b)}\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{\mu(b)}\pi(2k+1)\right)+i\sin\left(2\frac{1}{\mu(b)}\pi(2k+1)\right)\right]^{\nu(b)}$$

Usando la Fórmula de De Moivre:

$$\Omega=\left|\sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}\right|\cdot\left[\cos\left(\frac{\nu(b)}{\mu(b)}\pi(2k+1)\right)+i\sin\left(\frac{\nu(b)}{\mu(b)}\pi(2k+1)\right)\right]$$

$$\Omega=\left|\sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}\right|\cdot\left[\cos\left(b\pi(2k+1)\right)+i\sin\left(b\pi(2k+1)\right)\right];a\in\mathbb{R}^-,b\in\mathbb{Q}$$

Uno se podría preguntar como encontrar las otras ramas, y por lo tanto resultados complejos de una raíz de un número positivo. Y de la misma manera, por qué estas posibilidades no se han mencionado hasta ahora. Para poder obtener las ecuaciones complejas se usará otra equivalencia de la identidad de Euler.

$$\sqrt[n]{x}=1^{\frac{1}{n}}\cdot\left|\sqrt[n]{x}\right|\Rightarrow\rho(n)=1^{\frac{1}{n}}$$

$$e^{2k\pi i}=1\Rightarrow e^{\frac{1}{n}\cdot 2k\pi i}=1^{\frac{1}{n}}=\rho(n)$$

$$\therefore\rho_k(n)=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$\rho_k(n)$ será el vector de dirección del resultado final cuando $x>0$. Similar a $\delta_k(n)$ para $x<0$. Por lo tanto, el resultado final será

$$a^b=\left|\sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}\right|\cdot\left[\cos\left(2kb\pi\right)+i\sin\left(2kb\pi\right)\right];a\in\mathbb{R}^+,b\in\mathbb{Q}\tag{2.14}$$

Incluyendo cuando $a\geq 0$, nuestra función queda como:

$$F(a,b,k)=\begin{cases}\left|\sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}\right|\cdot\left[\cos\left(2kb\pi\right)+i\sin\left(2kb\pi\right)\right] & : \ a\geq 0\\ \left|\sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}\right|\cdot\left[\cos\left(b\pi(2k+1)\right)+i\sin\left(b\pi(2k+1)\right)\right] & : \ a<0\end{cases};a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{Q},k\in\mathbb{Z}\tag{2.15}$$

Ahora mismo k es un valor arbitrario que no depende ni de a ni de b. Es necesario construir una nueva función que solo tome como valores a y b, y que omita k. Es por eso que la comunidad matemática tiene por defecto $k=0$ (Mathews 2005). Una manera de entender por qué se usa este valor y no otro es justamente la razón por la cual no se ha mencionado las múltiples raíces complejas de un número positivo hasta el final. Solo cuando $k = 0$ se da un valor real para $x > 0$, puesto que $\rho_0(n) = 1$ siempre. Por lo tanto:

$$f(a, b) = F(a, b, 0); a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}$$

Por el momento es necesario que $b \in \mathbb{Q}$, puesto que b se define como una división de enteros. Tiene que haber una manera de calcular el módulo del resultado $\left|\sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}\right|$ de una manera donde no se referencien $\nu(b)$ ni $\mu(b)$ para que pueda $b \in \mathbb{R}$. Eso es posible si se tiene en cuenta la existencia de los logaritmos.

$$\left|\sqrt[\mu(b)]{a^{\nu(b)}}\right| = \left|a^{\frac{\nu(b)}{\mu(b)}}\right| = \left|a^b\right| = |a|^b = e^{\ln(|a|^b)} = e^{b \ln |a|} \tag{2.16}$$

No obstante, se podría decir que la definición de a^b ahora es más compleja de calcular, puesto que ahora es necesario además de una potencia, un logaritmo. Esto se puede solucionar por la definición que tienen esas funciones. Matemáticamente se puede definir e^x mediante una serie de Maclaurin (Taylor 1717) como sería

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{2.17}$$

La misma idea no se puede aplicar para $\ln(x)$, puesto que en $x = 0$ dicha función tiene una singularidad, y por lo tanto, la aproximación de Taylor no convergerá al valor real en todo x aun centrando a un valor que no sea 0. Para solventarlo, se usa la definición de $\ln(x)$ (Anton 2020) de la siguiente manera:

$$\ln |x| = \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t \tag{2.18}$$

Así pues, utilizando los logaritmos y teniendo en cuenta que la rama compleja principal será la de $k = 0$, la expresión final queda:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a, b &\longmapsto \begin{cases} e^{b \ln (a)} & : \ a \geq 0 \\ e^{b \ln |a|} \cdot [\cos (b\pi) + i \sin (b\pi)] & : \ a < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.19}$$

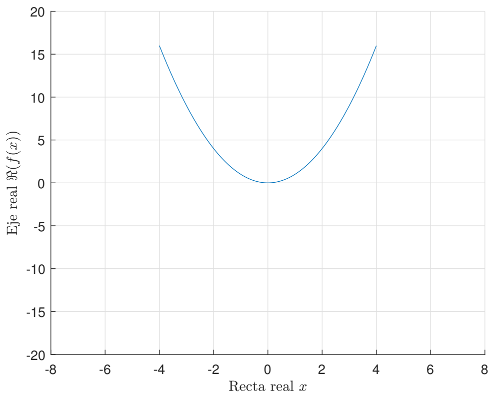
2.3. Visualización

Se quiere visualizar la siguiente función:

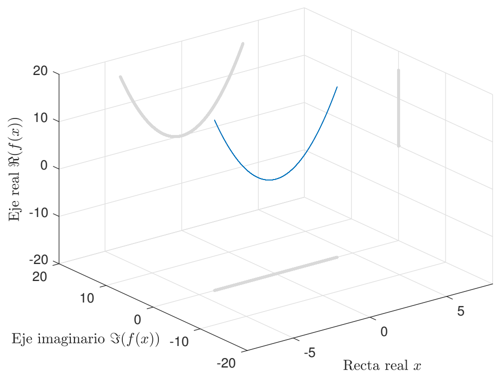
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto x^r \end{aligned} \quad ; r \in \mathbb{R}^+$$

Para representar visualmente la función se necesitarán 3 dimensiones. x pertenece al conjunto $\mathbb{R}$, que se puede representar como una recta, la recta real. $f(x)$ en cambio pertenece al conjunto $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ se representa con el plano complejo. Por lo tanto, cada número de la recta $\mathbb{R}$ tendrá como salida un plano complejo $\mathbb{C}$. Si a cada punto de una recta se le asocia un plano, el resultado es un espacio de 3 dimensiones, que si se le acota a valores máximos y mínimos, el resultado es un prisma rectangular, que se puede representar a su vez, en un plano —como es este documento— mediante una proyección.

Para representarlo se emplea un programa propio escrito en Java que calcula la función para un determinado r. Posteriormente se representa en Matlab. Concretamente se representa x^r de manera que $x \in [-4, 4]$. Como r también es variable, y los humanos carecen de procesado de cuatro dimensiones, Δr se aplica en el tiempo dentro del programa. Debido a las limitaciones de un formato digital como este, se usarán varias figuras para cada valor de r.



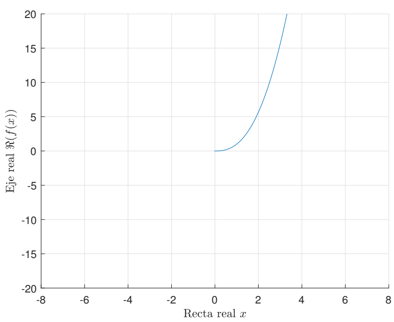
(a) En el plano real, $\Im(f(x)) = 0$



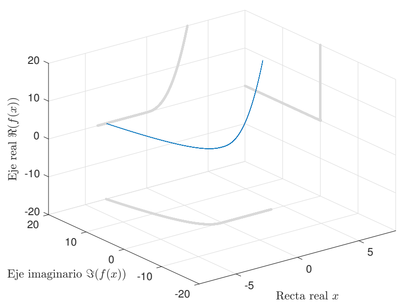
(b) En el espacio complejo

Figura 2: Representación de x^2

Puesto que $\sin(2\pi) = 0$, (ver ecuación 2.19) x^2 solo pertenece en $\mathbb{R}$ (Fig. 2a). Para $x^{2.5}$ en cambio, $\cos(\frac{5\pi}{2}) = 0$ y $\sin(\frac{5\pi}{2}) = 1$. Por lo tanto, por $x > 0$, $x^{2.5} \in \mathbb{R}$, y por $x < 0$, $x^{2.5} = ai; a \in \mathbb{R}$.



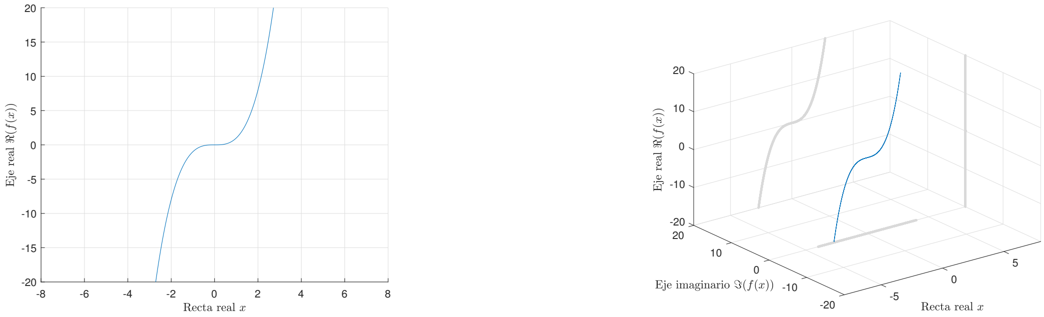
(a) En el plano real, $\Im(f(x)) = 0$



(b) En el espacio complejo

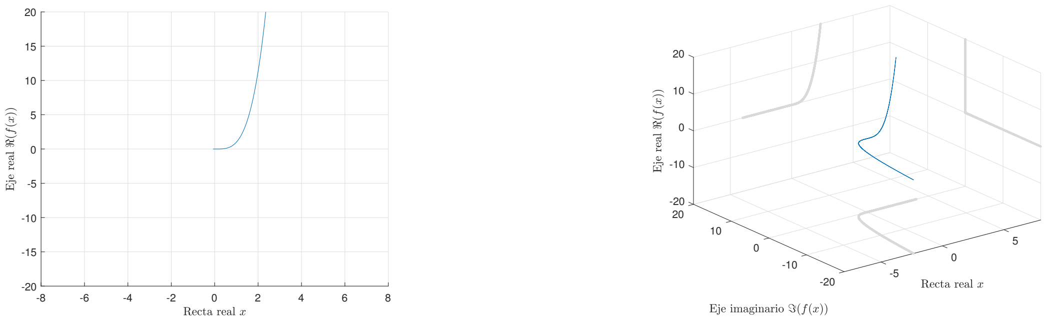
Figura 3: Representación de $x^{2.5}$

x^3 y $x^{3.5}$ tienen un comportamiento similar:



(a) En el plano real, $\Im(f(x)) = 0$ (b) En el espacio complejo

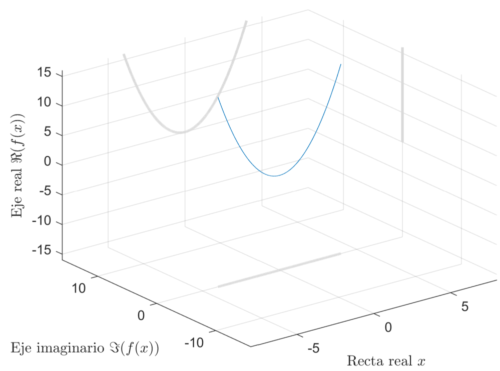
Figura 4: Representación de x^3



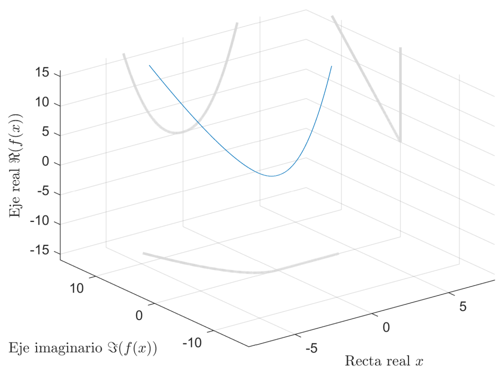
(a) En el plano real, $\Im(f(x)) = 0$ (b) En el espacio complejo

Figura 5: Representación de $x^{3.5}$

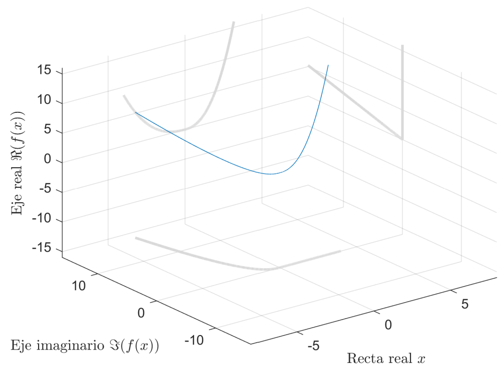
Si se hiciera un video donde $\mathrm{d}t = k \cdot \mathrm{d}r$, o sea, que en cada incremento de tiempo, en cada fotograma aumentase r a ritmo constante, entonces aparentaría que la parte de la curva donde $x < 0$ estuviese rotando también a ritmo constante. Como no se puede presentar un video en este formato, se adjuntan varias figuras con los *fotogramas*.



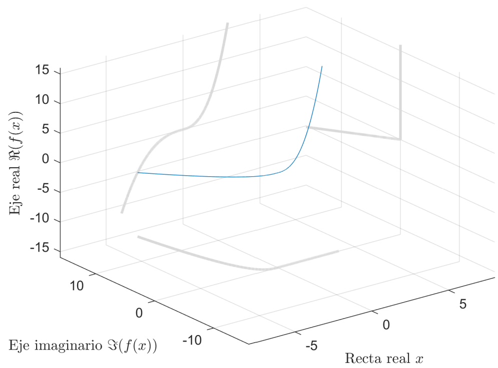
(a) x^2



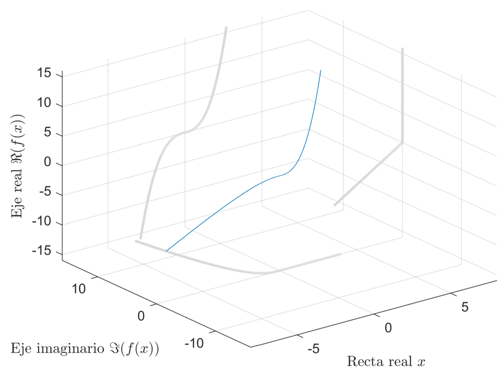
(b) $x^{2.2}$



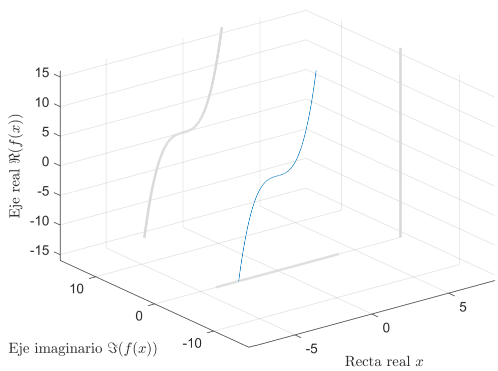
(c) $x^{2.4}$



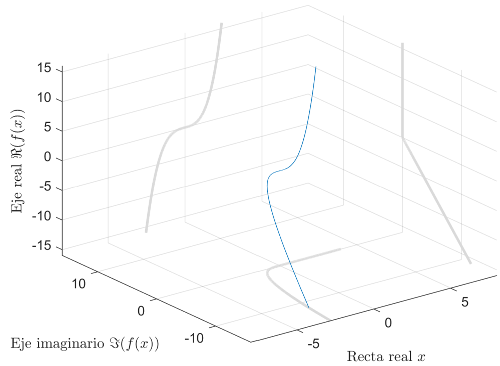
(d) $x^{2.6}$



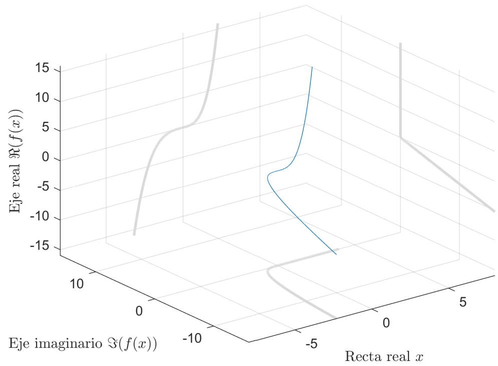
(e) $x^{2.8}$



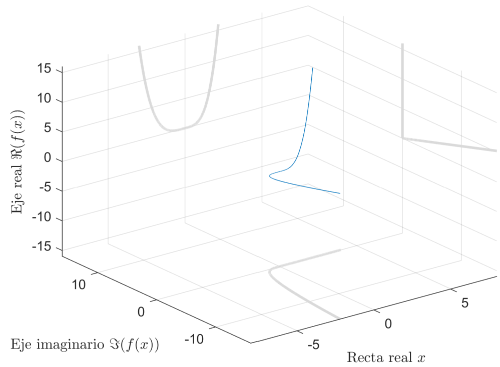
(f) x^3



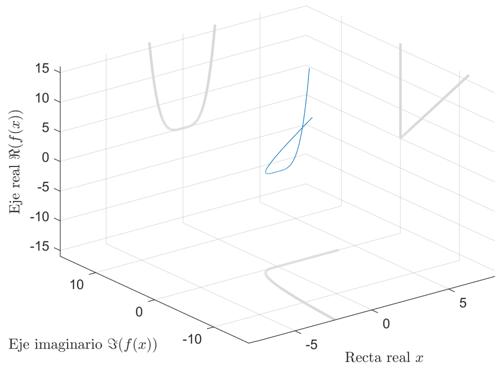
(g) $x^{3.2}$



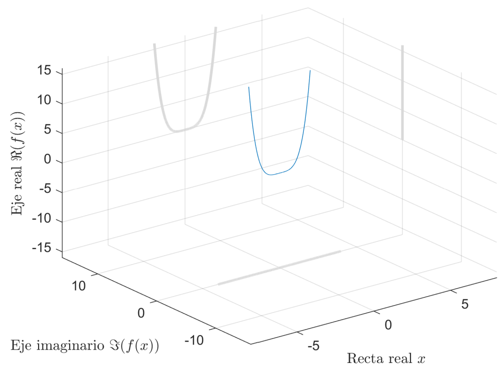
(h) $x^{3.4}$



(i) $x^{3.6}$



(j) $x^{3.8}$

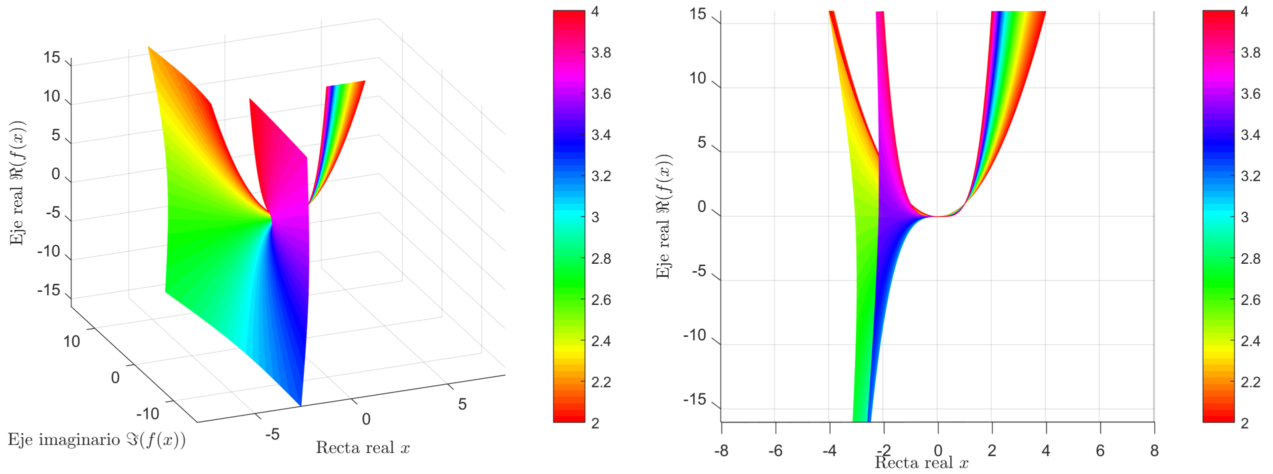


(k) x^4

Figura 6: Representación de x^r de $r = 2$ a $r = 4$ usando MATLAB

Cuando r pasa de 2 a 4 se completa un ciclo y se vuelve a empezar (Fig. 6).

De la misma manera que se puede hacer una figura distinta para cada valor de r, también es posible superponer las curvas en único espacio. Concretamente en la figura 7 se muestran a la vez las curvas donde r va de 2 a 4 con $\Delta r = 0.001$. Como el paso es tan pequeño, parece que forme una superficie. La barra de color indica el valor de r. Se puede observar como cuando $r = 2$ es color rojo, cuando $r = 3$ es cian, y vuelve a rojo cuando $r = 4$. Si bien es una superficie con color variable en un espacio complejo de 3 dimensiones, no se debe confundir con la superficie a Riemann de la función z^r (Riemann 1851).

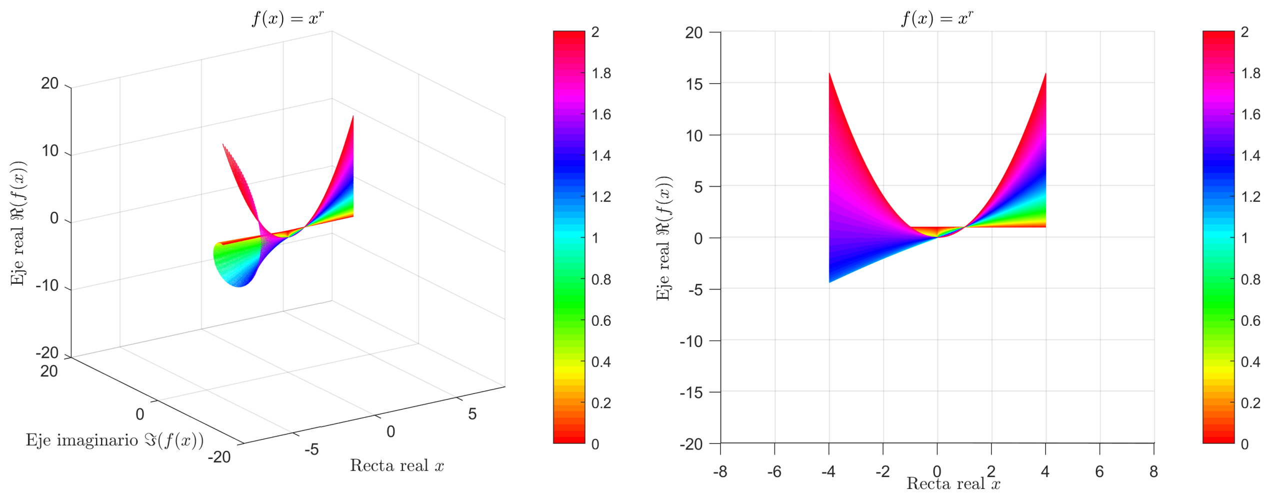


(a) En el espacio complejo

(b) En perspectiva del plano real

Figura 7: $x^r; r \in [2,4]$

La figura 7b no es exactamente un corte del plano complejo donde $\Im(f(x)) = 0$, sino que se ha escogido una perspectiva que no distinga en profundidad para la recta $\Im(f(x))$. De esta manera se puede observar como el *amplitud* de las *parábolas* va disminuyendo con el aumento de r. No obstante, el término *parábola* no es del todo apropiado. Una parábola de grado n es formada por un polinomio de grado n, pero por la definición de polinomio, es necesario que $n \in \mathbb{Z}$,[2] (Weiss s.f.) y por lo tanto solo cuando $r = 2, 3, 4$ se deben denominar como parábolas. El resto de no-polinomios se encuentran en la categoría de polinomios exponenciales (Ritt 1929) o también llamados polinomios generalizados (Jameson 2006). Es por eso que se ha escogido el término *parábolas generalizadas complejas*.



(a) En el espacio complejo

(b) En perspectiva del plano real

Figura 8: $x^r; r \in [0,2]$

En el caso de $r \in [0,2]$ se puede observar como el gráfico pasa de ser la recta $\Re(f(x)) = 1$, cuando $r = 0$, a la recta $\Re(f(x)) = x$, en $r = 1$, hasta convertirse en una parábola, en $r = 2$.

[2]Sin incluir el número 0 en $\mathbb{Z}$

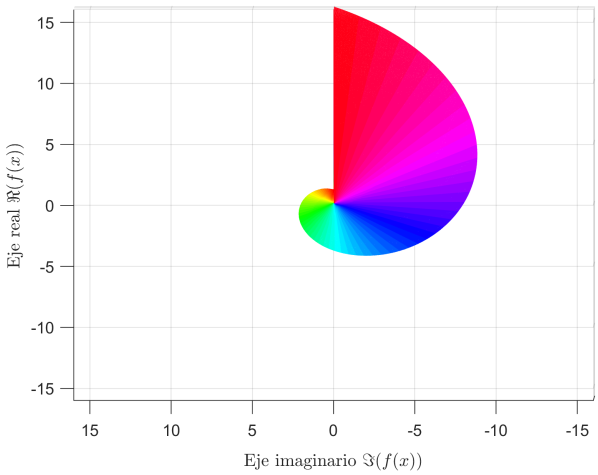


Figura 9: Proyección de $x^r; r \in [0, 2], x = -4$

Puede parecer en la figura 9 que surja un espiral para $0 \leq r < 2$ y que este desaparezca cuando $r \geq 2$ en la figura 7, pero en realidad es una ilusión causada por los límites del espacio de 3 dimensiones graficado. En todo momento se sigue la curva paramétrica de

$$(\Im(f(x)), \Re(f(x))) = (x^r \sin(\pi r), x^r \cos(\pi r)) \tag{2.20}$$

Que, debido a la proyección de la figura 9 invirtiendo el sentido de la recta $\Im(f(x))$ y que $x = -4$, sería igual al espiral con fórmula

$$R = 4^{\left(\frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2}\right)},\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

Generalizando para cualquier valor de x

$$R(x) = (-x)^{\left(\frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2}\right)},\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \tag{2.21}$$

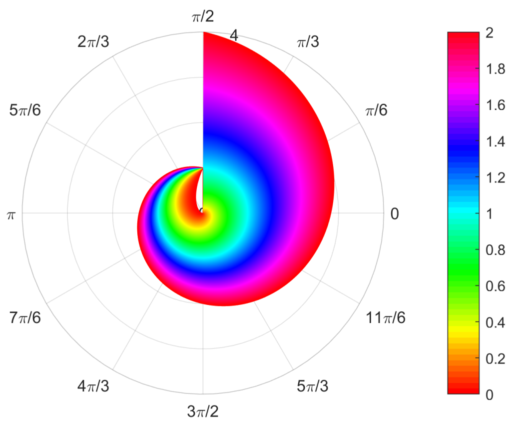


Figura 10: $R(x); x \in [0, 2]$

En esta figura 10 se muestra el valor de la espiral en función de x, dónde $0 \leq x \leq 2$. El color es esta imagen no representa el valor de r, sino el valor de x, por lo tanto $R(1)$, que tiene el color cian, muestra el espiral que se forma al cortar la superficie de la figura 8 en el plano $\Im(f(x)) \times \Re(f(x))$ dónde $x = -1$. No es casualidad que $R(1)$ sea un círculo, ya que representa la función $\delta_0(n)$, dónde n representaría el ángulo de la espiral. Y justamente la función $\delta_k(n)$ es un vector director con módulo 1. Por lo tanto, $R(1)$ representa la sobreposición de todo $\delta_0(n)$.

2.4. Propiedades colaterales

A raíz del comportamiento observado en la figura 6, la investigación inicial, surgen preguntas suficientemente pertinentes para incluir su respuesta en esta exploración matemática.

En relación con su *giro*, aparentemente parece que el ángulo de giro de la parte negativa de x^r aumente proporcionalmente con r. También parece que la parte negativa de x^r permanece girando para todo valor $r > 0$. Tampoco queda claro si todo x^r tiene el mismo ángulo independientemente de x cuando $x < 0$. Se quiere demostrar analíticamente que esas 3 afirmaciones son ciertas.

Demostración. Sea α el ángulo entre la recta OX,[3] el punto $(0,0,0)$ y x^r para cualquier valor de x y de r:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\Im(x^r)}{\Re(x^r)}\right) = \arctan\left(\frac{e^{r\ln|a|}\cdot\sin(r\pi)}{e^{r\ln|a|}\cdot\cos(r\pi)}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(r\pi)}{\cos(r\pi)}\right) = \arctan(\tan(r\pi))$$

$$\therefore \alpha = r\pi \tag{2.22}$$

Como α no depende de x, x^r siempre tendrá el mismo ángulo de giro para todo x. Además, sí que es proporcional a r. ■

Demostración. Sea la constante ε el cambio de $r(t)$ por cada unidad de tiempo y ω el cambio de α respecto el tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \varepsilon$$

Utilizando el resultado de la ecuación 2.22 se sabe que:

$$\alpha = r\pi$$

Derivando respecto t:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \pi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\omega = \varepsilon\pi \tag{2.23}$$

Como ω depende exclusivamente de dos constantes, siempre tendrá el mismo valor, por lo tanto la función $x^{r(t)}$ siempre girará a la misma velocidad. ■

[3] La recta $\mathbb{R}$ con los valores de x.

2.5. Interpolación compleja

Una vez definido con éxito la exponenciación real, es razonable cuestionarse el comportamiento los números complejos. [4] No obstante, existe un problema al intentar visualizar la función, puesto que esta pasa de tener 4 dimensiones (x, r, $\Re(f(x,r))$ y $\Im(f(x,r))$) a 6, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z, w &\longmapsto z^w \end{aligned} \tag{2.24}$$

En este caso las 6 dimensiones son: $\Re(z)$, $\Im(z)$, $\Re(w)$, $\Im(w)$, $\Re(f(z,w))$ y $\Im(f(z,w))$. Para representar funciones complejas de un solo parámetro comúnmente se emplea el coloreado de dominios, donde cada punto de un plano de dos dimensiones tiene asociado un color, con longitud de onda e intensidad variables, indicando 4 dimensiones en total (Poelke y Polthier 2012). En esta interna no se empleará ninguna técnica de representación de funciones complejas puesto que excede los objetivos iniciales.

Para poder interpolar exponenciación compleja se querrá conservar las mismas propiedades que en el apartado 2.2. Con estos requisitos se puede interpolar analíticamente: Sea $z = R\,[\cos\theta + i\sin\theta]$, y $w = c + di$:

$$\Omega = z^w = (R\,[\cos\theta + i\sin\theta])^{c+di} = (R\,[\cos\theta + i\sin\theta])^{c} \cdot (R\,[\cos\theta + i\sin\theta])^{di}$$

$$\Omega = R^c \cdot [\cos(c\theta) + i\sin(c\theta)] \cdot R^{di} \cdot [\cos(d\theta i) + i\sin(d\theta i)]$$

Para calcular R^{di} no hay extensivas complicaciones, puesto que:

$$R^{di} = e^{di\ln R} = \cos(d\ln R) + i\sin(d\ln R)$$

Como $R > 0$, se puede efectuar $\ln R$ sin problemas. Para calcular $\cos(d\theta i)$ y $\sin(d\theta i)$ se debe emplear la fórmula de Euler, que permite ampliar las funciones a los números complejos:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$\begin{gathered} e^{-ix} = \cos -x - i\sin -x = \cos x - i\sin x \\ \therefore e^{ix} + e^{-ix} = \cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x = 2\cos x \\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{gathered} \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered} e^{ix} - e^{-ix} = \cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x = 2i\sin x \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} \end{gathered} \tag{2.26}$$

Por lo tanto, el resultado final queda:

$$\Omega = R^c \cdot [\cos(c\theta) + i\sin(c\theta)] \cdot [\cos(d\ln R) + i\sin(d\ln R)] \cdot \left[\frac{e^{i^2 d\theta} + e^{-i^2 d\theta}}{2} + \frac{e^{i^2 d\theta} - e^{-i^2 d\theta}}{2}\right]$$

$$\Omega = R^c \cdot [\cos(c\theta) + i\sin(c\theta)] \cdot [\cos(d\ln R) + i\sin(d\ln R)] \cdot e^{-d\theta} \tag{2.27}$$

De igual manera que existe exponenciación compleja, existen también logaritmos complejos. Se quiere demostrar que con una interpolación adecuada se puede llegar al mismo resultado para z^w:

[4] Matemáticamente existen más conjuntos que engloban a los números complejos, llamados números hipercomplejos como son los cuaterniones u octoniones (Conway y Smith 2003).

Demostración.

$$\Omega = z^w = e^{w\ln(z)}$$

$$\ln(z) = \ln(R\,[\cos\theta + i\sin\theta]) = \ln(R\cdot e^{i\theta}) = \ln(R) + \ln(e^{i\theta}) = \ln(R) + \theta i$$

$$w\ln(z) = (c+di)(\ln R + i\theta) = c\ln R + ic\theta + di\ln R - d\theta$$

$$\Omega = e^{-d\theta}\cdot e^{ic\theta}\cdot e^{c\ln R}\cdot e^{di\ln R} = e^{-d\theta}\cdot[\cos(c\theta) + i\sin(c\theta)]\cdot e^{\ln(R^c)}\cdot e^{di\ln R}$$

$$\Omega = R^c\cdot[\cos(c\theta) + i\sin(c\theta)]\cdot[\cos(d\ln R) + i\sin(d\ln R)]\cdot e^{-d\theta}$$

En estos dos métodos se ha empleado la fórmula de Euler, y por lo tanto se ha tomado por defecto la rama real $k = 0$ pero legitima que la interpolación del logaritmo conserve sus propiedades que tiene con los números reales. ■

Un hecho curioso puede ser que $i^i \in \mathbb{R}$. Siguiendo la fórmula 2.27:

$$z = i = 1\cdot[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)]$$

$$w = i = 0 + 1i$$

$$i^i = 1^0\cdot\left[\cos\left(0\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(0\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot[\cos(1\cdot\ln 1) + i\sin(1\cdot\ln 1)]\cdot e^{-1\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$i^i = [1+0i]\cdot[1+0i]\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.20787957635$$

3. Discusión y conclusión

Si bien el título inicial para este escrito incluía únicamente la palabra *real* —y por ende, no compleja— se ha observado como el limitarse exclusivamente a los números reales, como hace Desmos en la figura 1, no solo complica el propio concepto, con propiedades (como la amplitud, el dominio, o el recorrido) aparentemente arbitrarias, sino que además se llegan a contradicciones[5]. La aparición natural de los números complejos ha cambiado entonces, el título. Pero entonces surge la pregunta: ¿Por qué, si es incorrecto, Desmos sigue legitimando estas propiedades erróneas de la exponenciación? ¿Qué sentido tiene? Siempre existe la posibilidad de que sea un simple error indetectado, o que los desarrolladores no consideren necesario modificarlo, puesto que Desmos es una herramienta para trabajar con solo números reales. También es posible que haya casos donde este error se *cancele* y que gráficamente dé el mismo resultado. En todo caso Desmos no debería usarse como calculadora o fuente fiable, puesto que es, al fin y al cabo, una calculadora gráfica. Pero el modelo de Desmos es, en cierta medida, algo intuitivo, puesto que como en la parte donde $x > 0$ la parábola va modificando su amplitud, intuitivamente podría pasar lo mismo en la parte negativa. Esta cierta consistencia viene de que para Desmos $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta(n) = -1$.

El ejemplo de Desmos permite mostrar como forzar a algo simple (usar solo números reales) acaba complicando las cosas. Si bien los resultados de esta exploración han sido antiintuitivos, puesto que se ha tenido que añadir una tercera dimensión compleja para observar el *giro*, el propio comportamiento tiene, en sí, suficientemente sentido. Puesto que el recorrido de las parábolas de grado n van alternando entre solo positivos, o todo $\mathbb{R}$, tiene sentido que haya una rotación en los valores intermedios. No obstante, aún teniendo sentido, el soporte visual ha sido esencial para transmitir de manera pertinente el conocimiento sobre parábolas generalizadas complejas, puesto que sin ello, partiendo exclusivamente de la fórmula matemática analítica 2.19 se podría haber intuido un movimiento harmónico simple debido a las funciones $\sin b\pi$ y $\cos b\pi$, pero no hubiera sido razón suficiente para un razonamiento bien formado. Ha sido el conjunto de la fórmula matemática con el recurso visual que han resultado con una explicación precisa.

Saliendo el mundo abstracto que son las matemáticas, la exponenciación compleja es presente en ámbitos de la física como la función de onda de partículas libres (Nave 1998)

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

y esto es porque $e^{\pi i}$ es en realidad un hélice en el espacio complejo. Esa parte de la ecuación hace que la función se vuelva una onda.

Sería interesante experimentar con distintos valores de k y sus funciones, relacionado con lo llamado *aliasing*[6]. También visualizar de distinta manera la función. O hasta poder visualizar $z^w, z, w \in \mathbb{C}$ usando 3 dimensiones de espacio y 3 dimensiones de coloreado que son RGB o formatos de colores equivalentes.

[5]Como evaluar $(-1)^{0.6}$ a -1, pero marcar como indefinido $(-1)^{0.5}$

[6]Debido a la repetición de los resultados de las raíces cuando $k \gg 0$ puesto que los resultados de una raíz de grado n siguen un ciclo de los mismos n elementos.

Referencias

Anton, H (jul. de 2020). *Calculus Eleventh Edition*. 11.ª ed. Nashville, TN: John Wiley & Sons.

Conway, John H y Derek A Smith (2003). *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. AK Peters/CRC Press.

Cotes, Roger y Edmond Halley (1714). "Logometria auc̆tore Rogero Cotes, Trin. Coll. Cantab. Soc., Astr. & Ph. Exp. Professore Plumiano, & RS S". En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 29.338, págs. 5-45.

Goodstein, Reuben Louis (1947). "Transfinite ordinals in recursive number theory". En: *The Journal of Symbolic Logic* 12.4, págs. 123-129.

Jameson, Graham JO (2006). "Counting zeros of generalised polynomials: Descartes' rule of signs and Laguerre's extensions". En: *The Mathematical Gazette* 90.518, págs. 223-234.

Mathews, John H. (2005). "Branches of Complex Functions". en. En: *California State Univ. Fullerton, Department of Mathematics*. URL: `https://web.archive.org/web/20061209014913/http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/ComplexFunBranchMod.html` (visitado 22-01-2023).

Nave, Carl Rod (1998). *Hyperphysics*. URL: `http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/Scheq.html#c3`.

Poelke, Konstantin y Konrad Polthier (2012). "Domain coloring of complex functions: an implementation-oriented introduction". En: *IEEE Computer Graphics and Applications* 32.5, págs. 90-97.

Riemann, Bernhard (1851). *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Huth.

Ritt, Joseph Fels (1929). "On the zeros of exponential polynomials". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 31.4, págs. 680-686.

Sebestyén, Zoltán y Zsigmond Tarcsay (2017). "On the square root of a positive selfadjoint operator". En: *Periodica Mathematica Hungarica* 75, págs. 268-272.

Taylor, Brook (1717). *Methodus incrementorum directa & inversa*. Inny.

Weiss, Ittay (s.f.). *Taylor Polynomials, Why only Integer Powers?* Mathematics Stack Exchange. URL: `https://math.stackexchange.com/q/579904`.

Womack, David (2013). "Repeated powers: The operation of tetration". En: *Mathematics in School* 42.4, págs. 38-40.